## التمرين الأوّل : ............. (06,5 نقاط)

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$ .

1) أ) أدرس تغيّرات الدالة $f$ على $[0;1]$ .

ب) إستنتج أنّه إذا كان $x\in[0;1]$ فإنّ $f(x)\in[0;1]$ .

ج) مثّل بيانيا الدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .(الوحدة $10cm$) .

2) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرّفة بـ : $u_0=0$ وَمن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$ .

أ) باستعمال المنحني $(C)$ للدّالة $f$ عيّن على محور الفواصل الحدود : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ .

✓ أعط تخمينا حول إتجاه و تقارب المتتالية $(u_n)$ .

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\le u_n\le 1$ .

ج) بيّن أنّ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ ، ثمّ إستنتج إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ .

د) هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة ؟ . برّر إجابتك .

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ .

أ) برهن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

ج) إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ .

## التمرين الثاني : ............. (06 نقاط)

يلعب طفل بـ 20 كريّة ، منها 13 كريّة حمراء وَ 7 كريّات خضراء . يضع 10 كريّات حمراء وَ 3 كريّات خضراء في العلبة $A$ ، و يضع الباقي في العلبة $B$ .

1) في أوّل لعبة يختار 3 كريّات عشوائيا و في **آن واحد** من العلبة $A$ و ينظر كم كريّة حمراء ظهرت .
ليكن $X$ المتغيّر العشوائي المتعلق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

✓ عيّن قانون إحتمال المتغيّر العشوائي $X$ ، ثمّ أحسب أمله الرّياضي $E(X)$ .

2) و في ثاني لعبة ، يختار الطفل إحدى العلب و يسحب منها كرة واحدة .
أ) مثّل هذه الوضعية بشجرة الإحتمالات .

ب) أحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .
ج) علما أنّ الطفل سحب كرة حمراء ، ما إحتمال أن تكون من العلبة $A$ ؟ .

## التمرين الثالث : ................ (07,5 نقاط)

**الجزء الأوّل :** نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}$ .

1) أحسب نهايات الدالة $g$ عند $0$ وَ $+\infty$ .
2) أدرس تغيّرات الدالة $g$ و شكل جدول تغيّراتها .
3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ حيث : $1,4<\alpha<1,5$ .
✓ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ من المجال $]0;+\infty[$ .

**الجزء الثّاني :** $f$ دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-2)\ln x$ .

$(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب نهاية الدّالة $f$ عند $0$ و عند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النهاية عند $0$ هندسيا .
2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .
3) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\dfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقرّبة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha\approx 1,45$ .
4) $(T_{x_0})$ هو المماس لـلمنحني $(C_f)$ عند النقطة $M_0$ ذات الفاصلة $x_0$ :
أ) أكتب المعادلة الديكارتية للمماس $(T_{x_0})$ .
ب) عيّن $x_0$ إذا علمت أنّ المماس $(T_{x_0})$ يمر بالنقطة $A(2;0)$ .
ج) إستنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مماسين يمرّان بالنقطة $A$ ، ثمّ أكتب معادلة كل منهما .
5) أرسم كلاّ من المماسين و المنحني $(C_f)$ .

**الجزء الثالث :** نعتبر المستقيم $(d_m)$ الذي معادلته $y=mx-2m$ ، حيث $m$ وسيط حقيقي .

أ) تحقّق أنّ $(d_m)$ يمر بالنقطة $A$ .
ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-2m$ .

## التمرين الأول :

لدينا الدالة $f$ المعرفة على $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$ .

1) أ) دراسة تغيّرات الدالة $f$ على $[0;1]$ :

لدينا من أجل كل $x$ من $[0;1]$ : $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}$ ، أي : $f'(x)>0$ .

ومنه الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0;1]$ .

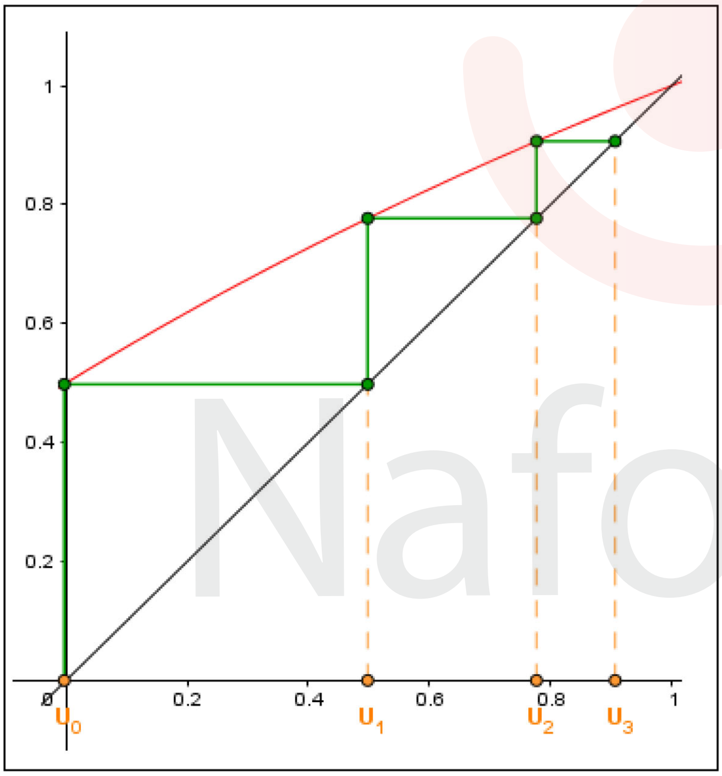
ب) لدينا $x\in[0;1]$ أي : $0\le x\le 1$ ، بما أن الدالة $f$ متزايدة على $[0;1]$ فإن : $f(0)\le f(x)\le f(1)$ ، أي :

$\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$ ، لكن : $0\le\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$ ، ومنه : $0\le f(x)\le 1$ ، أي : $f(x)\in[0;1]$ .

إذن : إذا كان $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$ .

ج) **التمثيل البياني :**

أنظر الشكل المقابل .




2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}.$$

أ) تمثيل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ .

أنظر الشكل المقابل .

**التخمين :** نلاحظ أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى $(C)$ و المستقيم ذو المعادلة $y=x$ .

ب) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\le u_n\le 1$ : ( **نستعمل البرهان بالتراجع** )

- ✓ التحقّق من أجل $n=0$ ، ( $u_0=0$ ) ، أي : $0\le 0\le 1$ ، ومنه : $0\le u_0\le 1$ ( **محققة** ).
- ✓ نفرض صحة الخاصية من أجل $n$ ، أي : $0\le u_n\le 1$ .
- ✓ نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي : $0\le u_{n+1}\le 1$ .

لدينا فرضا : $0\le u_n\le 1$ ، و حسب السؤال الأوّل **(ب)** نستنتج أنّ : $0\le f(u_n)\le 1$ أي : $0\le u_{n+1}\le 1$ .

Nafouz

الخاصية محققة من أجل $n+1$ يستلزم أنّها صحيحة من أجل $n$ ، ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ :
$0 \le u_n \le 1$ . وهو المطلوب.

ج) بيان أنّ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n$ ، أي : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$ ، أي :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$ ، ومنه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ . **وهو المطلوب.**

✓ لدينا : $0 \le u_n \le 1$ ، ومنه : $1-u_n \ge 0$ ، وَ أيضا : $u_n+2>0$ ، وَ $u_n+4>0$ .

إذن : $u_{n+1}-u_n \ge 0$ ، و منه المتتالية $(u_n)$ متزايدة .

د) نعم المتتالية $(u_n)$ متقاربة.

✓ بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1 $(0 \le u_n \le 1)$ إذن فهي متقاربة.

3) لدينا : $(v_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ .

أ) برهان أن المتتالية $(v_n)$ هندسية :

نحسب $v_{n+1}$ : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \dfrac{\dfrac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4}}{\dfrac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10}$ ، ومنه :

$v_{n+1} = \dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}$ ، أي : $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$ ، إذن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{5}$ وَ $v_0 = -\dfrac{1}{2}$ .

ب) كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ عبارة $u_n$ بدلالة $n$ :

✓ عبارة $v_n$ : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ .

✓ عبارة $u_n$ : لدينا : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ ، أي : $v_nu_n + 2v_n = u_n - 1$ ، أي : $v_nu_n - u_n = -2v_n - 1$ ،

ومنه : $(v_n-1)u_n = -2v_n - 1$ ، أي : $u_n = \dfrac{-2v_n-1}{v_n-1}$ ، أي : $u_n = \dfrac{-2\times(-\frac{1}{2})(\frac{2}{5})^n - 1}{(-\frac{1}{2})(\frac{2}{5})^n - 1}$ ،

إذن : $u_n = \dfrac{(\frac{2}{5})^n - 1}{(-\frac{1}{2})(\frac{2}{5})^n - 1}$ .

ج) إستنتاج نهاية المتتالية $(u_n)$ :

نعلم أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{5})^n = 0$ ، ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 1$ .

## التمرين الثاني :

**1) اللّعبة الأولى :**

أوّلا نعين قيم المتغيّر العشوائي $X$ : بما أنّه يرفق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة فتكون قيمه كالتالي :

$\mathbb{X} \in \{0;1;2;3\}$ .

✓ تعيين قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$ :

عدد الحالات المكنة للسحب من العلبة $A$ هي : $C_{13}^{3} = \dfrac{13!}{3!(13-3)!} = 286$ .

1) $\dfrac{1}{286} = \dfrac{C_3^3}{286} = p(X=0)$ .

2) $\dfrac{30}{286} = \dfrac{10 \times 3}{286} = \dfrac{C_{10}^{1} \times C_3^2}{286} = p(X=1)$ .

3) $\dfrac{135}{268} = \dfrac{45 \times 3}{286} = \dfrac{C_{10}^{2} \times C_3^1}{286} = p(X=2)$ .

4) $\dfrac{120}{286} = \dfrac{C_{10}^{3}}{286} = p(X=3)$ .

| $X_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\dfrac{1}{286}$ | $\dfrac{30}{286}$ | $\dfrac{135}{286}$ | $\dfrac{120}{286}$ |

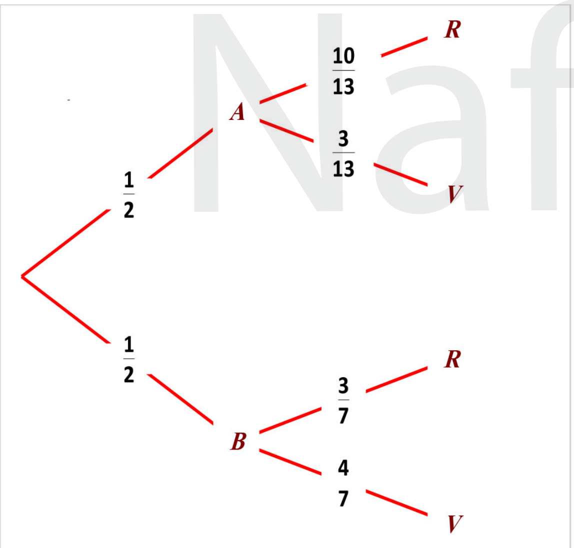
✓ حساب الأمل الرياضي $E(X)$ :

$$E(X) = \frac{0(1)+1(30)+2(135)+3(120)}{286} = \frac{30+270+360}{286} = \frac{660}{286} \approx 2,3$$ .

**2) اللّعبة الثانية :**

أ) تمثيل الوضعية بشجرة الإحتمالات :

أنظر الشكل المقابل .




ب) إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء هو :

$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R)$ .

$p(R) = (p(A) \times p_A(R)) + (p(B) \times p_B(R))$ .

أي ، $p(R) = (\dfrac{1}{2} \times \dfrac{10}{13}) + (\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{7})$ :

$p(R) = (\dfrac{5}{13}) + (\dfrac{3}{14}) = \dfrac{70+39}{182} = \dfrac{109}{182}$ .

ج) حساب الإحتمال الشرطي : $p_R(A)$

$$p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13} \times \frac{182}{109}$$

ومنه : $p_R(A) = \dfrac{70}{109}$ .

## التمرين الثالث :

**الجزء الأول :** نعتبر الدّالّة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}$ .

1) حساب النهايات :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}-2\\0^{+}\end{cases}$ $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x-2}{x}=-\infty\end{cases}$ .

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x}=1\end{cases}$ .

2) دراسة تغيّرات الدالة $g$ و تشكيل جدول تغيّراتها :

**الدالة المشتقة :**

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ،

و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{2}}$.

نلاحظ أن : $g'(x)>0$ من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ .

إذن الدالة $g$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .

**جدول التغيّرات :**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

3) بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ حيث : $1,4<\alpha<1,5$ :

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على $]0;+\infty[$ ، إذن هي مستمرة و رتيبة على المجال $[1,4;1,5]$ .

و بما أنّ : $\begin{cases}g(1,4)=-0,09\\g(1,5)=0,07\end{cases}$ أي : $g(1,4)\times g(1,5)<0$ ، إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$

حيث : $1,4<\alpha<1,5$ .

✓ إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ من $]0;+\infty[$ : نلخّص الإشارة في الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

من أجل $x\geq\alpha$ يكون $g(x)\geq g(\alpha)$ ، أي : $g(x)\geq 0$ .

من أجل $0<x<\alpha$ يكون $g(x)<g(\alpha)$ ، أي : $g(x)<0$ .

**الجزء الثاني :** $f$ دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-2)\ln x$ .

1) حساب النهايات :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[1+(x-2)\ln x\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x-2)=-2\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\ln x=-\infty\end{cases}$ .

**التفسير الهندسي :** المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا عموديّا معادلته $x=0$ .

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+(x-2)\ln x\right]=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ و تشكيل جدول تغيّراتها :

✓ **الدالة المشتقة :** الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ، و دالتها المشتقة هي :

$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x-2)$ ، أي : $f'(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}$ ، ومنه : $f'(x)=g(x)$ .

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ .

✓ **جدول التغيّرات :**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

3) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقرّبة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha\approx 1,45$ .

نعلم أنّ : $g(\alpha)=0$ ، أي : $\ln\alpha+\frac{\alpha-2}{\alpha}=0$ ، ومنه : $\ln\alpha=-\frac{\alpha-2}{\alpha}$ .

نحسب الآن $f(\alpha)$ : $f(\alpha)=1+(\alpha-2)\ln\alpha$ ، أي : $f(\alpha)=1+(\alpha-2)(-\frac{\alpha-2}{\alpha})$ ، ومنه :

$f(\alpha)=1-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، و هو المطلوب .

✓ من أجل $\alpha\approx 1,45$ ، يكون : $f(\alpha)\approx 0,8$ .

4) $(T_{x_0})$ هو المماس لـلمنحني $(C_f)$ عند النقطة $M_0$ ذات الفاصلة $x_0$ :

أ) كتابة معادلة المماس $(T_{x_0})$ : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ .

ب) بما أنّ $(T_{x_0})$ يشمل النقطة $A(2;0)$ فيكون لدينا : ( إحداثياها يحقّقان معادلة المماس $(T_{x_0})$ ) .

أي : $0=f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$ ، أي : $0=\left[\ln x_0+\frac{x_0-2}{x_0}\right](2-x_0)+1+(x_0-2)\ln x_0$ ، ومنه :

$0=(x_0-2)\left[\ln x_0-(\ln x_0+\frac{x_0-2}{x_0})\right]+1$ ، أي : $(x_0-2)\left[-\frac{x_0-2}{x_0}\right]=-1$ ، ومنه :

$-\frac{(x_0-2)^2}{x_0}=-1$ ، أي : $-(x_0-2)^2=-x_0$ ، أي : $(x_0-2)^2=x_0$ ، أي : $x_0^2-4x_0+4-x_0=0$ ،

ومنه : $x_0^2-5x_0+4=0$ ، معناه أنّ : $x_0=1$ ، أو $x_0=4$ .

ج) إذن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسين يمران بالنقطة $A$ :

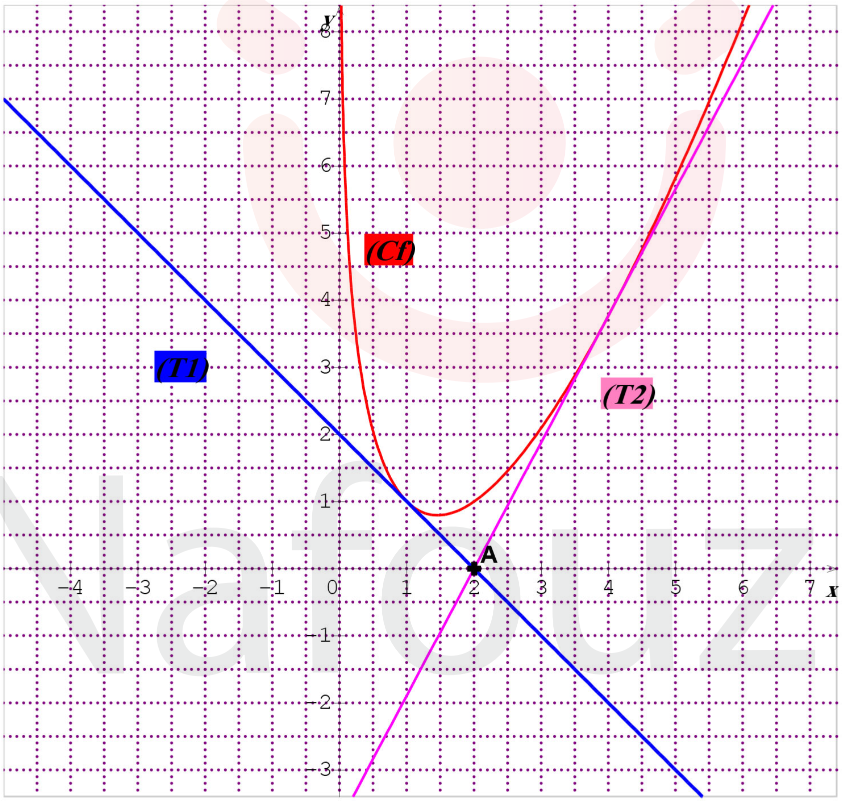
✓ المماس الأول يمسّ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $1$ .

✓ المماس الثاني يمسّ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $4$ .

1) معادلة المماس الأول : $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، ومنه : $(T_1): y=-x+2$ .

2) معادلة المماس الثاني : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$ ، ومنه : $(T_2): y=(\ln 4+\frac{1}{2})x-2\ln(4)-1$ .

5) رسم المماسين و المنحنى $(C_f)$ :




**الجزء الثالث :** $(d_m): y=mx-2m$ .

أ) التحقق أنّ : $(d_m)$ يمر بالنقطة $A$ أي : نعوض إحداثيي النقطة $A$ في معادلة المستقيم $(d_m)$ :

$0=m(2)-2m$ ، إذن : $(d_m)$ يشمل النقطة $A$ .

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x)=mx-2m$ :

عدد حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم $(d_m)$ .

المستقيم $(d_m)$ يتحرك حركة دورانية حول النقطة الثابتة $A$ .

نعلم أنّ المماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ يمرّان أيضا بالنقطة $A$ .

لدينا : $\begin{cases} (d_m) : y = mx - 2m \\ (T_1) : y = -x + 2 \\ (T_2) : y = (\ln 4 + \frac{1}{2})x - 2\ln(4) - 1 \end{cases}$ . ندرس ثلاث حالات :

✓ لما : $m < 0$ ، هناك ثلاث حالات :

1) $m < -1$ معناه أنّ : $(d_m)$ يقع فوق $(T_1)$ ، ومنه المعادلة تقبل حلّين متمايزين .

2) $m = -1$ معناه أنّ : $(d_m)$ هو نفسه $(T_1)$ ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو $1$ .

3) $-1 < m < 0$ معناه أنّ : $(d_m)$ يقع تحت $(T_1)$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m = 0$ معناه أنّ : $(d_m) : y = 0$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m > 0$ ، هناك ثلاث حالات :

1) $0 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : $(d_m)$ يقع تحت $(T_2)$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

2) $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : $(d_m)$ هو نفسه $(T_2)$ ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو $4$ .

3) $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : $(d_m)$ يقع فوق $(T_2)$ ، ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين .